التمرين1: (8 نقط)

الجزء I: - نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $I=]-\infty,1[$ بما يلي: $f(x)=\ln(1-x)$

و ليكن (C) تمثيلها المبياني في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

1- أ) بين أن الدالة f متصلة على I	0.25
ب) بين أن الدالة f تناقصية قطعا على I	0.25
ج) احسب $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$	0.75
د) أول مبيانيا النتائج المحصل عليها.	0.5
ه) اعط جدول تغيرات f	0.25
2- أ) بين أن المنحنى (C) مقعر.	0.25
ب) مثل مبيانيا المنحنى (C) في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$	0.25
3- أ) بين أن الدالة f تقابل من I نحو $\mathbb{R}$ نرمز بالرمز f^{-1} لتقابلها العكسي.	0.25
ب) حدد $f^{-1}(x)$ من أجل $x\in\mathbb{R}$	0.25
ج) تحقق أن: $f^{-1}(-1)=1-e^{-1}$	0.25

الجزء II- لكل عدد حقيقي x و لكل عدد صحيح طبيعي $n\geq 2$، نضع:

$$P_n(x)=x+\frac{x^2}{2}+.........+\frac{x^n}{n}$$

1- بين أن لكل عدد صحيح طبيعي $n\geq 2$ ، يوجد عدد حقيقي وحيد $x_n\in]0,1[$ بحيث: $P_n(x_n)=1$	0.5
2- حدد العدد الحقيقي $\alpha=x_2$ و تحقق أن: $0<\alpha<1$	0.5
3- أ) بين أن لكل عدد صحيح طبيعي $n\geq 2$ ، لدينا: $P_{n+1}(x_n)>1$	0.5
ب) استنتج أن المتتالية $(x_n)_{n\geq2}$، المعرفة حسب ما سبق، تناقصية قطعا.	0.5
ج) بين أن لكل عدد صحيح طبيعي $n\geq 2$ ، لدينا: $x_n\in]0,\alpha]$	0.25
د) بين أن المتتالية $(x_n)_{n\geq2}$ متقاربة.	0.25

4- لكل عدد حقيقي $x\in I$ و لكل عدد صحيح طبيعي $n\geq 2$، نضع: $f_n(x)=f(x)+P_n(x)$

أ) بين أن: $f_n'(x)=\frac{-x^n}{1-x}$ $\quad(\forall x\in I)\ ;\ (\forall n\geq 2)$	0.5
ب) بين أن: $\lvert f_n'(x)\rvert\leq\frac{\alpha^n}{1-\alpha}$ $\quad(\forall x\in[0,\alpha])\ ;\ (\forall n\geq 2)$	0.25

0.5 ج) استنتج أن: $|f_n(x)| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}$ $\quad (\forall n \geq 2)\ ;\ (\forall x \in [0,\alpha])$

0.5 د) بين أن: $|f(x_n)+1| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}$ $\quad (\forall n \geq 2)$

0.5 ه) استنتج قيمة $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$

التمرين2: (4 نقط)

نعتبر الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $F(x)=\int_0^x e^{t-\frac{t^2}{2}}\,dt$

0.5 1- أ) حدد إشارة $F(x)$ حسب قيم x

1 ب) بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و احسب مشتقتها الأولى $F'(x)$

0.5 2- أ) باستعمال طريقة المكاملة بالأجزاء، بين أن: $\int_0^1 F(x)dx=\int_0^1 (1-x)e^{x-\frac{x^2}{2}}\,dx$

0.5 ب) احسب $\int_0^1 F(x)dx$

3- نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ المعرفة بما يلي:

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*) \quad u_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1}\left((n-k)\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} e^{x-\frac{x^2}{2}}\,dx\right)$$

0.5 أ) تحقق أن: $(\forall n\in\mathbb{N}^*) \quad u_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1}(n-k)F\left(\frac{k+1}{n}\right)-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1}(n-k)F\left(\frac{k}{n}\right)$

0.5 ب) بين أن: $(\forall n\in\mathbb{N}^*) \quad u_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n}F\left(\frac{k}{n}\right)$

0.5 ج) استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ متقاربة و حدد نهايتها.

التمرين3: (4 نقط)

m عدد عقدي مخالف للعددين 2 و $-i$ و المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$

نعتبر في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z^2-(m-i)z-im=0 \quad : \quad (E)$

0.5 1) أ- تحقق ان مميز المعادلة (E) هو $(m+i)^2$

0.5 ب- حدد z_1 و z_2 حلي المعادلة (E)

0.75 ج – علما أن $m=e^{i\frac{\pi}{8}}$ ، اكتب العدد z_1+z_2 على الشكل الأسي.

2) نعتبر النقط A و B و M التي ألحاقها على التوالي 2 و $-i$ و m ولتكن M' مماثلة M بالنسبة للمحور التخيلي.

0.5 ا- حدد لحق النقطة M' بدلالة m

0.75 ب – حدد بدلالة m، لحق النقطة N بحيث يكون الرباعي $ANM'B$ متوازي الأضلاع

1 ج - بين أن المستقيمين (AM) و (BM') متعامدين إذا و فقط إذا كان: $\mathrm{Re}\left((2-i)m\right)=\mathrm{Re}\left(m^2\right)$

التمرين4: (4 نقط)

ليكن a عددا صحيحا طبيعيا أكبر من أو يساوي 2. نضع:

$$A=1+a+a^2+a^3+a^4+a^5+a^6$$

ليكن p عددا أوليا فرديا بحيث: p يقسم A

1 1- أ) بين أن $a^7\equiv 1\ [p]$، استنتج أن: $\forall n\in\mathbb{N}\ ;\ a^{7n}\equiv 1\ [p]$

1 ب) بين أن a و p أوليان فيما بينهما، استنتج أن: $\forall m\in\mathbb{N}\ ;\ a^{(p-1)m}\equiv 1\ [p]$

2- نفترض أن 7 لا يقسم $p-1$

0.5 أ) بين أن: $a\equiv 1\ [p]$

0.5 ب) استنتج أن: $p=7$

1 3- بين أنه إذا كان p عددا أوليا فرديا بحيث: p يقسم A فإن: $p=7$ أو $p\equiv 1\ [7]$

انتهى

تصحيح مقترح لموضوع الرياضيات

شعبة العلوم الرياضية

الدورة الاستدراكية 2020 2021



التمرين 1

الجزء I

$I =]-\infty ; 1[$

$(\forall x \in I) \quad f(x) = \ln(1-x)$

1-أ) الاتصال على I :

الدالة: $u : x \longmapsto 1-x$ متصلة على I

و $u(I) = u(]-\infty ; 1[) =]0,+\infty[$

و بما أن $\ln$ متصلة على $]0,+\infty[$

فإن: $f = \ln \circ u$ متصلة على I.

1-ب) الرتابة:

f قابلة للاشتقاق على I ولدينا:

$(\forall x \in I); \quad f'(x) = \frac{(1-x)'}{1-x} = \frac{-1}{1-x}$

$x \in I \Rightarrow x < 1 \Rightarrow 1-x > 0$

$\Rightarrow \frac{-1}{1-x} < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$

اذن f تناقصية قطعا على I

1-ج) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \ln(1-x)$

$= \lim\limits_{t\to 0^+} \ln(t) = \boxed{-\infty}$

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \ln(1-x)$

$= \lim\limits_{t\to +\infty} \ln(t) = \boxed{+\infty}$

$\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{1-x}{x} \times \frac{\ln(1-x)}{1-x}$

ولدينا: $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{1-x}{x} = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{-x}{x} = \boxed{-1}$

و $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{\ln(1-x)}{1-x} = \lim\limits_{t\to +\infty} \frac{\ln t}{t} = \boxed{0}$

اذن:

$\boxed{1} \quad \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -1 \times 0 = \boxed{0}$

1-د) تأويل هندسي:

بما أن: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$

فإن المستقيم الذي معادلته: $y = 1$ مقارب عمودي لـ: (C).

لدينا: $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

اذن (C) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاصيل بجوار $(-\infty)$.

1-هـ) جدول التغيرات:

$(\forall x < 1): \quad f'(x) < 0$.

x	$-\infty$ 1
$f'(x)$	$-$
f	$+\infty$ ↘ $-\infty$

2-أ) تقعر (C):

$\forall x < 1 \quad f'(x) = \frac{-1}{1-x}$

اذن f' ق.ش على I (دالة جذرية معرفة على I)

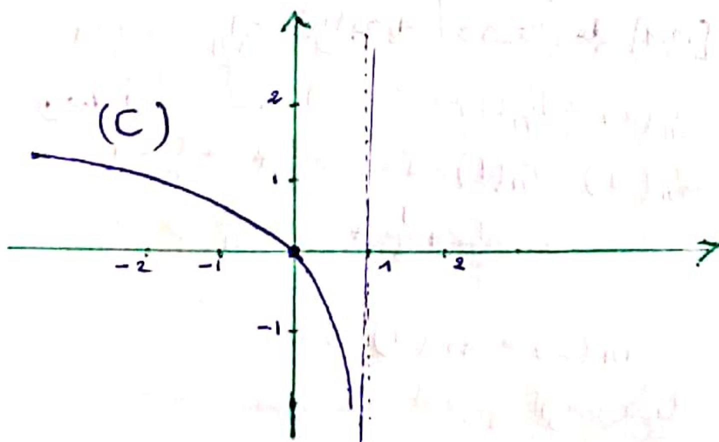
و بالتالي f ق.ش مرتين على I ولدينا:

$(\forall x \in I) \quad f''(x) = (f'(x))' = -\left(\frac{1}{1-x}\right)'$

$= +\frac{(1-x)'}{(1-x)^2} = \frac{-1}{(1-x)^2}$

بما أن: $f'' < 0$ فإن (C) مقعر على I.

2-ب) تمثيل (C):



2

المعادلة : $Q_n(x)=0$
تقبل حلا وحيدا : $x_n \in]0;1[$
اذن :

لكل $n\geq 2$ يوجد $x_n\in]0;1[$ وحيد بحيث : $P_n(x_n)=1$

2) $\alpha = x_2$ حل المعادلة $P_2(x)=1$

ولدينا $P_2(\alpha)=1$

$\Leftrightarrow \alpha+\frac{\alpha^2}{2}=1 \Leftrightarrow \alpha^2+2\alpha-2=0$

$\Delta = 12>0$

حلاه : $\alpha_1 = -1-\sqrt{3}$; $\alpha_2=-1+\sqrt{3}$

اذن : $\alpha=\alpha_1$ أو $\alpha=\alpha_2$

بما أن : $0<\alpha<1$ فإن $\alpha\neq\alpha_1$

و بالتالي : $\alpha=\alpha_2=-1+\sqrt{3}$

التحقق :

$\sqrt{3}>1 \Rightarrow -1+\sqrt{3}>0 \Rightarrow \alpha>0$
و
$\alpha=-1+\sqrt{3}<1 \Leftrightarrow \sqrt{3}<2$
$\Leftrightarrow 3<4$
هذه العبارة صحيحة.
اذا : $\alpha<1$
نستنتج أن : $0<\alpha<1$

3 - أ) ليكن $n\geq 2$. نبين أن $P_{n+1}(x_n)>1$.

نعلم أن : $P_n(x_n)=1$
ولدينا :

$$P_{n+1}(x)=\underbrace{x+\frac{x^2}{2}+\dots+\frac{x^n}{n}}_{P_n(x)}+\frac{x^{n+1}}{n+1}$$
$$= P_n(x)+\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

اذن :

$$P_{n+1}(x_n)=P_n(x_n)+\frac{x_n^{n+1}}{n+1}$$
$$=1+\frac{x_n^{n+1}}{n+1}>1$$

(لأن : $\frac{x_n^{n+1}}{n+1}>0$)

3 - أ) f متصلة وتناقصية قطعا على I : اذن f تقابل من I نحو :

$$f(I)=]\lim_{x\to 1^-} f(x);\lim_{x\to -\infty} f(x)[$$
$$=]-\infty;+\infty[=\mathbb{R}.$$

3 - ب) تحديد f^{-1} :

$f^{-1}:\mathbb{R}\longrightarrow I$

ليكن x من $\mathbb{R}$ و y من I.

$f^{-1}(x)=y \Leftrightarrow x=\ln(1-y)$
$\Leftrightarrow 1-y=e^x \Leftrightarrow y=1-e^x$

اذن :

$(\forall x\in\mathbb{R})\ f^{-1}(x)=1-e^x$

3 - ج) التحقق :

بما أن : $f^{-1}(x)=1-e^x$

فإن :

$f^{-1}(-1)=1-e^{-1}$

الجزء II

$\forall n\geq 2\quad P_n(x)=x+\frac{x^2}{2}+\dots+\frac{x^n}{n}$

1) ليكن $n\geq 2$.

نضع : $Q_n(x)=P_n(x)-1$

الدالة Q_n متصلة على المجال $[0;1]$
Q_n ق.ش على $\mathbb{R}$ (حدودية)
و $Q_n'(x)=1+x+\dots+x^{n-1}>0$
لكل x من $[0;1]$.

اذن : Q_n تزايدية قطعا على $[0;1]$

وبما أن : $Q_n(0)=P_n(0)-1=-1<0$
$Q_n(1)=P_n(1)-1=1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}-1$
$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}>0$

فإن :
$Q_n(0)\times Q_n(1)<0$
ومنه حسب مبرهنة القيم الوسيطية

3 - ب) الإستنتاج :

ليكن $n \geqslant 2$. لدينا مما سبق :

$$P_{n+1}(x_n) > 1$$

$$\Leftrightarrow P_{n+1}(x_n) > P_{n+1}(x_{n+1})$$

وبما أن P_{n+1} تزايدية قطعا على المجال $[0;1]$ (لأن : $\forall x \in [0;1]$ $P'_{n+1}(x) = 1+x+\dots+x > 0$)

و $x_n ; x_{n+1} \in]0;1[$

فإن : $x_n > x_{n+1}$

اذن : $x_{n+1} - x_n < 0$

وبالتالي $(x_n)_{n\geqslant 2}$ تناقصية قطعا .

---

3 - ج) بما أن $(x_n)_{n\geqslant 2}$ تناقصية فإنها مكبورة بحدها الأول x_2 . اذن:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < x_n \leqslant x_2$$

نعلم أن : $x_2 = \alpha$ اذن:

$$\boxed{(\forall n \in \mathbb{N}),\ 0 < x_n \leqslant \alpha}$$

---

3 - د) $(x_n)_{n\geqslant 2}$ تناقصية ومصغورة

اذن فهي متقاربة .

---

4) لكل x من I و $n \geqslant 2$:

$$f_n(x) = f(x) + P_n(x)$$

4 - أ) f_n ق.ش على I كمجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على I.

ولدينا :

$$(\forall x \in I).(\forall n \geqslant 2)\quad f'_n(x) = f'(x) + P'_n(x)$$

$$= \frac{-1}{1-x} + 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}$$

$$= \frac{-1}{1-x} + \frac{1-x^n}{1-x} \quad (\text{لأن } x \neq 1)$$

$$= \frac{-1+1-x^n}{1-x} = \frac{-x^n}{1-x}$$

اذن:

$$(\forall x \in I)(\forall n \geqslant 2)\quad \boxed{f'_n(x) = \frac{-x^n}{1-x}}$$

---

4 - ب) ليكن $n \geqslant 2$ و $x \in [0;\alpha]$

لدينا : $-x^n \leqslant 0$ و :

$$1 - x \geqslant 1 - \alpha > 0$$

اذن:

$$f'_n(x) = \frac{-x^n}{1-x} \leqslant 0$$

اذن:

$$|f'_n(x)| = \frac{x^n}{1-x}$$

الدالة :

$$h : x \mapsto \frac{x^n}{1-x}$$

ق.ش على $[0;\alpha]$ (دالة جذرية و $\alpha < 1$)

ولدينا :

$$\forall x \in [0;\alpha] :\ h'(x) = \frac{n x^{n-1}(1-x) + x^n}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{n x^{n-1} + (n+1) x^n}{(1-x)^2} \geqslant 0$$

اذن: h تزايدية على $[0;\alpha]$

اذن:

$$\forall x \in [0;\alpha] \quad h(0) \leqslant h(x) \leqslant h(\alpha)$$

$$" \quad 0 \leqslant \frac{x^n}{1-x} \leqslant \frac{\alpha^n}{1-\alpha}$$

وبالتالي:

$$(\forall n \geqslant 2)(\forall x \in [0,\alpha]) :\ |f'_n(x)| \leqslant \frac{\alpha^n}{1-\alpha}$$

---

4 - ج) ليكن $n \geqslant 2$.

f_n متصلة على $[0,\alpha]$.

وقابلة للاشتقاق على المجال $]0,\alpha[$

اذن حسب مبرهنة التزايدات المنتهية :

$$\forall x \in]0;\alpha] \quad \exists c_x \in]0;x[$$

$$f_n(x) - f_n(0) = f'_n(c_x)(x - 0)$$

$$f_n(x) = x\, f'_n(c_x)$$

(لأن: $f_n(0) = 0$)

نعلم أن:

$$\forall x \in [0,\alpha] \quad |f'_n(x)| \leqslant \frac{\alpha^n}{1-\alpha}$$

ولدينا :

$$0 \leqslant x < 1 \Rightarrow |x| \leqslant 1$$

اذن :

4

التمرين 2

$(\forall x\in\mathbb{R})\quad F(x)=\int_0^x e^{t-t^2/2}\,dt$

1 - أ) إشارة $F(x)$:

ليكن $x\in\mathbb{R}$. لدينا:

$(\forall t\in\mathbb{R})\quad e^{t-t^2/2}>0$

إذن:

$x\geqslant 0 \Rightarrow \int_0^x e^{t-t^2/2}\,dt\geqslant 0$

$x\leqslant 0 \Rightarrow \int_0^x e^{t-t^2/2}\,dt=-\int_x^0 e^{t-t^2/2}\,dt \leqslant 0$

(لأن: $\int_x^0 e^{t-t^2/2}\,dt\geqslant 0$)

أي أن:

$F(x)\geqslant 0$ إذا كان $x\in\mathbb{R}^+$

$F(x)\leqslant 0$ إذا كان $x\in\mathbb{R}^-$

1 - ب) ليكن $x\in\mathbb{R}$:

الدالة $v: t\longmapsto e^{t-t^2/2}$ متصلة على $\mathbb{R}$ (مركب دالتين متصلتين على $\mathbb{R}$)

إذن v تقبل دالة أصلية G على

ولدينا:

$F(x)=\int_0^x v(t)\,dt = G(x)-G(0)$

حيث: G قابلة للاشتقاق في x و:

$G'(x)=v(x)$

إذن F قابلة للاشتقاق في x .

وبالتالي:

لكل x من $\mathbb{R}$: F ق ش في x

حساب العدد المشتق $F'(x)$:

$(\forall x\in\mathbb{R})\quad F'(x)=G'(x)-G'(0)$

$=v(x)=e^{x-x^2/2}$

2 - أ) $\int_0^1 F(x)\,dx$

نستعمل مكاملة بالأجزاء:

نضع: $\begin{cases}p(x)=F(x)\\ q'(x)=1\end{cases}$ إذن: $\begin{cases}p'(x)=v(x)\\ q(x)=x\end{cases}$

$|f_n(x)|=|x|\,|f_n'(c_x)|$

$\leqslant 1\times\dfrac{\alpha^n}{1-\alpha}$

وبالتالي:

$(\forall n\geqslant 2)\ (\forall x\in\,]0;\alpha])$

$|f_n(x)|\leqslant\dfrac{\alpha^n}{1-\alpha}$

في حالة $x=0$ فإن:

$|f_n(0)|=0\leqslant\dfrac{\alpha^n}{1-\alpha}$

إذن فهي صحيحة لكل $x\in[0,\alpha]$

خلاصة:

$(\forall n\geqslant 2)(\forall x\in[0;\alpha])$

$|f_n(x)|\leqslant\dfrac{\alpha^n}{1-\alpha}$

4 - د) نعلم مما سبق أن:

$\forall n\geqslant 2\quad \forall x\in[0,\alpha]$

$|f_n(x)|\leqslant\dfrac{\alpha^n}{1-\alpha}$

وبما أن: $x_n\in\,]0;\alpha]$ فإن:

$|f_n(x_n)|\leqslant\dfrac{\alpha^n}{1-\alpha}$

حيث: $f_n(x_n)=f(x_n)+P_n(x_n)=f(x_n)+1$

إذن:

$(\forall n\geqslant 2)\quad |f(x_n)+1|\leqslant\dfrac{\alpha^n}{1-\alpha}$

4 - هـ) استنتاج قيمة $\lim x_n$:

$0<\alpha<1 \Rightarrow \lim\alpha^n=0$

وبما أن:

$(\forall n\geqslant 2)\ 0\leqslant|f(x_n)+1|\leqslant\dfrac{\alpha^n}{1-\alpha}$

فإن: $\lim f(x_n)=-1$

لدينا: $(\forall n\geqslant 2);\quad x_n=f^{-1}(f(x_n))$

f^{-1} دالة متصلة على $\mathbb{R}$ (لأن f متصلة)

إذن: $\lim x_n=\lim f^{-1}(f(x_n))$

$=f^{-1}(-1)=1-e^{-1}$

أي أن:

$\lim x_n = 1-e^{-1}$

$$\int_0^1 F(x)\,dx = \left[xF(x)\right]_0^1 - \int_0^1 x\,v(x)\,dx$$

$$= F(1) - \int_0^1 x\,v(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 v(x)\,dx - \int_0^1 x\,v(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 (1-x)\,v(x)\,dx$$

إذن :

$$\boxed{\int_0^1 F(x)\,dx = \int_0^1 (1-x)e^{x-x^2/2}\,dx}$$

2 - ب) حساب : $\int_0^1 F(x)\,dx$

بما أن : $\left(x - \frac{x^2}{2}\right)' = 1 - x$

فإن :

$$\int_0^1 (1-x)e^{x-\frac{x^2}{2}}\,dx = \left[e^{x-\frac{x^2}{2}}\right]_0^1$$

إذن :

$$\int_0^1 F(x)\,dx = e^{1-\frac{1}{2}} - e^0 = e^{\frac{1}{2}} - 1$$

$$\boxed{\int_0^1 F(x)\,dx = \sqrt{e} - 1}$$

3) لكل $n \geqslant 1$ نضع :

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1}\left((n-k)\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} e^{x-\frac{x^2}{2}}\,dx\right)$$

3 - أ) التحقق :

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$. لكل $k \in [0; n-1]$ لدينا :

$$F\left(\frac{k+1}{n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^{\frac{k+1}{n}} v(x)\,dx + \int_{\frac{k}{n}}^0 v(x)\,dx$$

$$= \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} v(x)\,dx \quad \text{(علاقة شال)}$$

إذن :

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1}(n-k)\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} v(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1}(n-k)F\left(\frac{k+1}{n}\right) - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1}(n-k)F\left(\frac{k}{n}\right)$$

3 - ب) نضع : $m = k+1$

إذن : $1 \leqslant m \leqslant n$ و $k = m - 1$

ولدينا :

$$\sum_{k=0}^{k=n-1}(n-k)F\left(\frac{k+1}{n}\right) = \sum_{m=1}^{m=n}(n-m+1)F\left(\frac{m}{n}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{k=n}(n-k+1)F\left(\frac{k}{n}\right)$$

(يمكننا استبدال m بأي حرف يخالف n)

و بالتالي :

$$u_n = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)F\left(\frac{k}{n}\right) - \sum_{k=0}^{k=n-1}(n-k)F\left(\frac{k}{n}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n-1}(n-k+1)F\left(\frac{k}{n}\right) + F\left(\frac{n}{n}\right) - \sum_{k=1}^{k=n-1}(n-k)F\left(\frac{k}{n}\right) - nF\left(\frac{0}{n}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{k=n-1}\left((n-k+1)-(n-k)\right)F\left(\frac{k}{n}\right) + F\left(\frac{n}{n}\right) - 0\right)$$

(لأن : $F\left(\frac{0}{n}\right) = 0$)

$$u_n = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{k=n-1}F\left(\frac{k}{n}\right) + F\left(\frac{n}{n}\right)\right)$$

إذن :

$$\boxed{(\forall n \geqslant 1) : \quad u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n}F\left(\frac{k}{n}\right)}$$

3 - ج) استنتاج التقارب :

لكل n من $\mathbb{N}^*$ لدينا :

$$u_n = \frac{1-0}{n}\sum_{k=1}^{n}F\left(\frac{k}{n}\right)$$

وبما أن الدالة F متصلة وتزايدية على $[0;1]$ (تكامل دالة موجبة) فإن $(u_n)_{n\geqslant 1}$ متقاربة .

تعليل F تزايدية : ليكن x و y من $\mathbb{R}$ بحيث : $x \geqslant y$ لدينا :

$$F(x) - F(y) = \int_y^x v(t)\,dt$$

$$\left.\begin{matrix}(\forall t \in \mathbb{R})\ v(t) > 0 \\ x \geqslant y\end{matrix}\right\} \Rightarrow \int_y^x v(t)\,dt \geqslant 0$$

إذن : $x \geqslant y \Rightarrow F(x) \geqslant F(y)$

ومنه F تزايدية

حساب النهاية:

$$\lim u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} F\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$= \int_0^1 F(x)\,dx = \boxed{\sqrt{e}-1}$$

التمرين 3:

ليكن $m \in \mathbb{C}-\{2;-i\}$

$$(E):\ z^2-(m-i)z-im=0$$

1-أ) التحقق:

$$\Delta = (m-i)^2+4im$$
$$= m^2-2mi+i^2+4im$$
$$= m^2+2mi+i^2 = (m+i)^2$$

1-ب) بما أن: $-i \neq m$

فإن: $m+i\neq 0$ اذن $\Delta \neq 0$

ومنه المعادلة تقبل حلين عقديين:

$$z_1 = \frac{m-i-m-i}{2} = \boxed{-i}$$

$$z_2 = \frac{m-i+m+i}{2} = \boxed{m}$$

1-ج) نأخذ: $m = e^{i\pi/8}$

اذن: $z_1+z_2 = m-i = e^{i\pi/8} - e^{i\pi/2}$

$$= e^{i\theta}\left(e^{i(\frac{\pi}{8}-\theta)} - e^{i(\frac{\pi}{2}-\theta)}\right)$$

حيث: $\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{5\pi}{16}$

اذن: $z_1+z_2 = e^{i\frac{5\pi}{16}}\left(e^{-\frac{3\pi}{16}i} - e^{\frac{3\pi}{16}i}\right)$

$$= 2i\sin\left(-\frac{3\pi}{16}\right)e^{i\frac{5\pi}{16}}$$
$$= 2\sin\left(-\frac{3\pi}{16}\right)(-i)\,e^{i\frac{5\pi}{16}}$$
$$= 2\sin\left(\frac{3\pi}{16}\right)e^{i\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{5\pi}{16}\right)}$$
$$= 2\sin\left(\frac{3\pi}{16}\right)e^{\left(-\frac{3\pi}{16}\right)i}$$

بما أن، $2\sin\left(\frac{3\pi}{16}\right) > 0$

فإن الكتابة الأسية لـ: z_1+z_2 هي:

$$\boxed{2\sin\left(\frac{3\pi}{16}\right)e^{-i\frac{3\pi}{16}}}$$

2) لتكن $A(2)$ و $B(-i)$ و $M(m)$

2-أ) ليكن m' لحق M'.

M' مماثلة M بالنسبة للمحور التخيلي

اذن: $\begin{cases} Re(m') = -Re(m) \\ Im(m') = Im(m) \end{cases}$

ومنه:

$$m' = -\left(Re(m) - i\,Im(m)\right)$$
$$= \boxed{-\bar{m}}$$

2-ب) ليكن n لحق N.

$ANM'B$ متوازي أضلاع يعني أن:

$$\vec{AN} = \vec{BM'} \iff aff(\vec{AN}) = aff(\vec{BM'})$$
$$\iff n-2 = m'+i$$
$$\iff \boxed{n = 2+i-\bar{m}}$$

2-ج) $(BM') \perp (AM)$

$$\iff (\vec{BM'};\vec{AM}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$$
$$\iff \arg\left(\frac{m-2}{m'+i}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$$
$$\iff Re\left(\frac{m-2}{m'+i}\right) = 0$$

ولدينا:

$$\frac{m-2}{m'+i} = \frac{(m-2)\overline{(m'+i)}}{|m'+i|^2}$$
$$= \frac{(m-2)(\overline{-\bar{m}+i})}{|-\bar{m}+i|^2}$$
$$= \frac{(m-2)(-m-i)}{|-\bar{m}+i|^2}$$
$$= \frac{-m^2+(2-i)m+2i}{|-\bar{m}+i|^2}$$

اذن:

$$Re\left(\frac{m-2}{m'+i}\right)=0 \iff Re\left(-m^2+(2-i)m\right)=0$$
$$\iff -Re(m^2)+Re((2-i)m)=0$$

الاستنتاج:

بما أن a و p أوليان فيما بينهما فإن حسب مبرهنة فيرما Fermat:

$$a^{p-1} \equiv 1 \ [p]$$

إذن:

$$(\forall m \in \mathbb{N}) \ (a^{p-1})^m \equiv 1^m \ [p]$$

$$\boxed{(\forall m \in \mathbb{N}) \ a^{(p-1)m} \equiv 1 \ [p]}$$

2) نفترض أن: $7 \nmid p-1$

2-أ) نبين أن: $a \equiv 1 \ [p]$

لدينا 7 فردي ولا يقسم $p-1$ (زوجي)

إذن: $7 \wedge (p-1) = 1$

ومنه حسب مبرهنة بيزوت Bézout

$$\exists (m,n) \in \mathbb{Z}^2 \quad (p-1)m + 7n = 1$$

إذن:

$$a^1 = a^{(p-1)m + 7n}$$
$$= a^{(p-1)m} \times a^{7n}$$

نعلم مماسبق أن:

$$\begin{cases} a^{(p-1)m} \equiv 1 [p] \\ a^{7n} \equiv 1 \ [p] \end{cases}$$

إذن:

$$a \equiv 1 \times 1 \ [p]$$

أي أن:

$$\boxed{a \equiv 1 \ [p]}$$

2-ب) الاستنتاج:

نعلم مماسبق أن:

$$\begin{cases} a \equiv 1 \ [p] \\ p \mid A \end{cases}$$

إذن:

$$\begin{cases} A \equiv \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{7 \text{ حدود}} \ [p] \\ A \equiv 0 \ [p] \end{cases}$$

ومنه:

$$7 \equiv 0 \ [p]$$

إذن $p \mid 7$ لكن p عدد أولي

إذن

$$\boxed{p = 7}$$

وبالتالي:

$$(BM') \perp (AM)$$
$$\Leftrightarrow Re((2-i)m) = Re(m^2)$$

التمرين 4:

$a \in \mathbb{N}$ و $a \geq 2$.

$$A = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + a^6$$

p أولي فردي يقسم A.

1-أ) بما أن $a \neq 1$ فإن:

$$A = \frac{a^7 - 1}{a - 1}$$

إذن:

$$(a-1)A = a^7 - 1$$

ولدينا:

$$p \mid A \Rightarrow p \mid (a-1)A$$
$$\Rightarrow p \mid a^7 - 1$$
$$\Rightarrow \boxed{a^7 \equiv 1 \ [p]}$$

الاستنتاج:

لدينا: $a^7 \equiv 1 \ [p]$ إذن:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad (a^7)^n \equiv 1^n \ [p]$$

ومنه:

$$\boxed{(\forall n \in \mathbb{N}) \quad a^{7n} \equiv 1 \ [p]}$$

"يمكن أيضا استعمال:

$$a^{7n} - 1 = (a^7 - 1)((a^7)^{n-1} + \dots + a^7 + 1)"$$

1-ب) نضع: $d = p \wedge a$

إذن $1 \leq d$ ولدينا:

$$\begin{cases} d \mid p \\ p \mid a^7 - 1 \end{cases} \Rightarrow d \mid a^7 - 1$$

و:

$$d \mid a \Rightarrow d \mid a^7$$

ومنه:

$$d \mid a^7 - (a^7 - 1) = 1$$

إذن: $d \leq 1$ ومنه: $\boxed{d = 1}$

وبالتالي:

$$\boxed{a \text{ و } p \text{ أوليان فيما بينهما}}$$

3) لنكن p عددا أوليا فرديا و $p|A$

لدينا :

$(7|p-1)$ أو $(7\nmid p-1)$

اذن : $(p\equiv 1[7])$ أو $(7\nmid p-1)$

وحسب ماسبق :

$$\left.\begin{matrix} 7\nmid p-1 \\ p|A \end{matrix}\right\} \Longrightarrow p=7$$

اذن :

$(p\equiv 1[7])$ أو $(p=7)$

— * * * fin * * * —

تم بحمد الله وتوفيقه .